Lösning av linjära differensekvationer med konstanta koefficienter

Gunnar Farnebäck
gf@isy.liu.se

960116

Notation

I = identitetsoperatorn, $If(n) = f(n)$
E = framåtskiftoperatorn, $Ef(n) = f(n+1)$
$\Delta = E - I$ = framåtdifferensoperatorn, $\Delta f(n) = f(n+1) - f(n)$

Potenser av E bildas genom sammansättning

$$E^k f(n) = f(n+k)$$

För fallet $k = 0$ sätter vi

$$E^0 = I$$

Genom att bilda polynom i E får vi differensoperatorer. Låt $p(\lambda)$ vara ett polynom i en variabel

$$p(\lambda) = a_N \lambda^N + a_{N-1} \lambda^{N-1} + \ldots + a_1 \lambda + a_0$$

Då har vi differensoperatorn

$$p(E) = a_N E^N + a_{N-1} E^{N-1} + \ldots + a_1 E + a_0 I$$

vars verkan på en funktion $f(n)$ beskrivs av

$$p(E)f(n) = a_N E^N f(n) + a_{N-1} E^{N-1} f(n) + \ldots + a_1 E f(n) + a_0 I f(n) =$$

$$= a_N f(n+N) + a_{N-1} f(n+N-1) + \ldots + a_1 f(n+1) + a_0 f(n)$$

Om alla a_i är oberoende av n sägs differensoperatorn ha konstanta koefficienter.

Linearitet

Differensoperatorn $p(E)$ är linjär, dvs

$$p(E)(\alpha u_1(n) + \beta u_2(n)) = \alpha p(E) u_1(n) + \beta p(E) u_2(n)$$

vilket följer direkt av att E och dess potenser har denna egenskap.

Problemformulering

Vi vill lösa den linjära differensekvationen

$$p(E)u(n) = f(n)$$

där
p är ett polynom i en variabel med konstanta koefficienter och $p(0) \neq 0$,
f är en känd funktion och
u är sökt.

Begynnelsevillkor bortses till att börja med ifrån.

Anmärkning

Kravet $p(0) \neq 0$ innebär ingen inskränkning eftersom det alltid kan uppfyllas genom att skifta differensekvationen som i följande exempel. För att förenkla framställningen antas också att högstagradskoefficienten är 1. Det kan alltid ordnas genom att skala om ekvationen men är inte viktigt för teorin.

Exempel

Den linjära rekursionen

$$u(n) = 5u(n-1) - 8u(n-2) + 4u(n-3) + n$$

kan skrivas om på formen ovan

$$u(n) - 5u(n-1) + 8u(n-2) - 4u(n-3) = n$$
$$/\ n \to\ n+3\ /$$
$$u(n+3) - 5u(n+2) + 8u(n+1) - 4u(n) = n+3$$
$$E^3u(n) - 5E^2u(n) + 8Eu(n) - 4Iu(n) = n+3$$
$$(E^3 - 5E^2 + 8E - 4I)u(n) = n+3$$

Genom att skifta n så att den äldsta termen heter $u(n)$ uppfylls kravet $p(0) \neq 0$ samtidigt som differensoperatorn blir ett polynom i E.
Ovanstående differensekvation kommer att studeras i samtliga exempel framöver.

Homogena och partikulära lösningar

Om $f(n) \equiv 0$ kallas differensekvationen homogen och annars inhomogen. En lösning $u(n)$ till $p(E)u(n) = 0$ kallas homogen (även om $f(n) \not\equiv 0$) och en lösning $u(n)$ till $p(E)u(n) = f(n)$ kallas partikulär. Speciellt gäller att om vi känner en partikulärlösning $u(n) = u_p(n)$ så kan samtliga lösningar skrivas på formen

$$u(n) = u_h(n) + u_p(n)$$

där $u_h(n)$ uppfyller

$$p(E)u_h(n) = p(E)(u(n) - u_p(n)) = p(E)u(n) - p(E)u_p(n) = f(n) - f(n) \equiv 0$$

Således kan vi bilda den allmänna lösningen om vi känner *en* partikulärlösning och samtliga homogena lösningar.

Exempel

En vanlig typ av homogen lösning är $u_h(n) = \lambda^n$, för något λ. Genom att ansätta den i differensekvationen från första exemplet får vi

$$(E^3 - 5E^2 + 8E - 4I)\lambda^n = \lambda^{n+3} - 5\lambda^{n+2} + 8\lambda^{n+1} - 4\lambda^n = (\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4)\lambda^n$$

Detta uttryck ska vara noll för alla n. Således måste λ uppfylla den så kallade karakteristiska ekvationen

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = 0$$

Karakteristiska ekvationen

Lösningarna till differensekvationen $p(E)u(n) = f(n)$ präglas i hög grad av rötterna till den karakteristiska ekvationen

$$p(\lambda) = 0$$

Givet de komplexa rötterna λ_i (distinkta) med multiplicitet m_i kan det karakteristiska polynomet p faktoriseras fullständigt på formen

$$p(\lambda) = \prod_i (\lambda - \lambda_i)^{m_i}$$

och således kan också differensoperatorn faktoriseras

$$p(E) = \prod_i (E - \lambda_i I)^{m_i}$$

Villkoret $p(0) \neq 0$ ger att alla $\lambda_i \neq 0$.

Exempel

Vi har det karakteristiska polynomet

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$$

och differensoperatorn kan faktoriseras som

$$p(E) = E^3 - 5E^2 + 8E - 4I = (E - I)(E - 2I)^2$$

Förskjutningsregeln

Substitutionen $u(n) = \lambda^n v(n)$ ger

$$E^k u(n) = u(n+k) = \lambda^{n+k} v(n+k) = \lambda^n \lambda^k E^k v(n) = \lambda^n (\lambda E)^k v(n)$$

Genom linjärkombinationer följer

$$p(E)u(n) = p(E)(\lambda^n v(n)) = \lambda^n p(\lambda E) v(n)$$

Sista likheten utgör förskjutningsregeln och talar om vad som händer med differensoperatorn $p(E)$ när en faktor λ^n "skjuts igenom" den.
Kombinerat med faktoriseringen av $p(E)$ erhålls ($\lambda \neq 0$)

$$p(E)(\lambda^n v(n)) = \lambda^n \Big(\prod_i (\lambda E - \lambda_i I)^{m_i}\Big) v(n) = \lambda^n \lambda^N \Big(\prod_i (E - \frac{\lambda_i}{\lambda} I)\Big) v(n)$$

där $N = \text{grad}\, p$.

Konvention

För att slippa undan specialfall framöver säger vi att ett polynom är av grad -1 om och endast om det är identiskt noll.

Observation

Låt $f(n)$ vara ett polynom av grad högst k och $0 \neq \lambda \neq 1$. Då är

1. $\sum f(n)\delta n$ ett polynom av grad högst $k+1$ och
2. $\sum f(n)\lambda^n \delta n = \tilde{f}(n)\lambda^n + C$, där grad $\tilde{f}$ är högst k och C en konstant.

Det senare resultatet följer efter (högst) k partiella summationer.

Sats

Den allmänna lösningen till den homogena differensekvationen

$$p(E)u(n) = 0$$

där differensoperatorn $p(E)$ har egenskaper och faktorisering enligt ovan, kan skrivas på formen

$$u(n) = \sum_i p_i(n)\lambda_i^n$$

där $p_i(n)$ är godtyckliga polynom av grad högst $m_i - 1$.

Bevis

Induktion på grad p. Påståendet är trivialt sant för grad $p = 0$. Antag att det är sant för grad $p = N - 1$. Då grad $p = N$ har vi efter substitutionen $u(n) = \lambda_1^n v(n)$ att

$$0 = p(E)u(n) = p(E)(\lambda_1^n v(n)) = \lambda_1^n p(\lambda_1 E)v(n) =$$

$$= \lambda_1^n \lambda_1^N \Big(\prod_i (E - \frac{\lambda_i}{\lambda_1} I)^{m_i}\Big) v(n) =$$

$$= \lambda_1^{n+N} \Big(\prod_i (E - \frac{\lambda_i}{\lambda_1} I)^{m_i - [i=1]}\Big)(E - \frac{\lambda_1}{\lambda_1} I)v(n) =$$

$$= \lambda_1^{n+N}\Big(\prod_i (E - \frac{\lambda_i}{\lambda_1} I)^{m_i - [i=1]}\Big)\Delta v(n)$$

Med substitutionen

$$w(n) = \Delta v(n)$$

har vi att

$$\Big(\prod_i (E - \frac{\lambda_i}{\lambda_1} I)^{m_i - [i=1]}\Big) w(n) = 0$$

varför enligt induktionsantagandet

$$\Delta v(n) = w(n) = \sum_i \tilde{p}_i(n)\Big(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\Big)^n = \tilde{p}_1(n) + \sum_{i>1} \tilde{p}_i(n)\Big(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\Big)^n$$

där grad $\tilde{p}_i \leq m_i - 1 - [i = 1]$.

Summation ger enligt observationen ovan (notera att $0 \neq \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \neq 1$ för alla $i > 1$)

$$v(n) = p_1(n) + \sum_{i>1} p_i(n)\Big(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\Big)^n = \sum_i p_i(n)\Big(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\Big)^n$$

där grad $p_i \leq m_i - 1$.

Återsubstitution ger slutligen

$$u(n) = \lambda_1^n v(n) = \sum_i p_i(n)\lambda_i^n$$

Q.E.D.

Exempel

Vi har tidigare sett att den karakteristiska ekvationen har rötterna 1 och 2 (dubbel). Om vi börjar med roten 1 behöver vi inte substituera utan har direkt

$$(E - I)(E - 2I)^2 u(n) = 0$$

$$(E - 2I)^2(\Delta u(n)) = 0$$

För att följa stegen i beviset ska nu $\Delta u(n)$ substitueras mot $w(n)$ och differensekvationen $(E - 2I)^2 w(n) = 0$ först lösas. Vid praktiskt räknande är det dock smidigare att göra tvärtom och faktorisera ut Δ till vänster istället.

$$\Delta((E - 2I)^2 u(n)) = 0$$

$$(E - 2I)^2 u(n) = \sum 0\delta n = A$$

Nu ger substitutionen $u(n) = 2^n v(n)$ att

$$(E - 2I)^2(2^n v(n)) = 2^n(2E - 2I)^2 v(n) = 4 \cdot 2^n \Delta^2 v(n) = A$$

$$\Delta^2 v(n) = \frac{A}{4}\Big(\frac{1}{2}\Big)^n$$

$$\Delta v(n) = \sum \frac{A}{4}\Big(\frac{1}{2}\Big)^n \delta n = -\frac{A}{2}\Big(\frac{1}{2}\Big)^n + B$$
$$v(n) = \sum \Big(-\frac{A}{2}\Big(\frac{1}{2}\Big)^n + B\Big)\delta n = A\Big(\frac{1}{2}\Big)^n + Bn + C$$

Återsubstitution ger slutligen de homogena lösningarna

$$u(n) = 2^n v(n) = A + (Bn + C)2^n$$

vilka vi med hjälp av satsen hade kunnat skriva upp direkt.

Partikulärlösningar

Metoden i beviset och i exemplet ovan, nämligen att upprepat faktorisera loss differensoperatorer och summera, är användbart även i det inhomogena fallet. Enda skillnaden är att man får hålla reda på (och summera ett flertal gånger) en extra term i högerledet. Tyvärr blir detta i praktiken mycket arbetsamt. Genom att studera det principiella uppförandet kan i alla fall följande enkla ansatsregler ges:

1. Om $f(n) = q(n)\phi^n$ där q är ett polynom och ϕ ej är en rot till den karakteristiska ekvationen, ansätt

   $$u_p(n) = \tilde{q}(n)\phi^n$$

   där $\tilde{q}(n)$ är ett polynom av samma grad som $q(n)$.

2. Om $f(n) = q(n)\phi^n$ där q är ett polynom och ϕ är en rot till den karakteristiska ekvationen med multiplicitet m, ansätt

   $$u_p(n) = n^m\tilde{q}(n)\phi^n$$

   där $\tilde{q}(n)$ är ett polynom av samma grad som $q(n)$.

3. Superposition. Om $f(n) = g(n) + h(n)$, u_{pg} är en lösning till $p(E)u(n) = g(n)$ och u_{ph} är en lösning till $p(E)u(n) = h(n)$ så är

   $$u_p(n) = u_{pg}(n) + u_{ph}(n)$$

   en lösning till $p(E)u(n) = f(n)$ eftersom differensoperatorn är linjär

   $$p(E)(u_{pg}(n) + u_{ph}(n)) = p(E)u_{pg}(n) + p(E)u_{ph}(n) = g(n) + h(n) = f(n)$$

Exempel

Vi gör om föregående räkning med högerledet inkluderat

$$\Delta((E-2I)^2u(n)) = n + 3$$

$$(E-2I)^2u(n) = \sum (n+3)\delta n = \frac{n^2+5n}{2} + A_1$$
$$/ \ u(n) = 2^n v(n) \ /$$

$$4 \cdot 2^n \Delta^2 v(n) = \frac{n^2+5n}{2} + A_1$$

$$\Delta^2 v(n) = \Big(\frac{n^2+5n}{8} + \frac{A_1}{4}\Big)\Big(\frac{1}{2}\Big)^n$$

$$\Delta v(n) = \sum \Big(\frac{n^2+5n}{8} + \frac{A_1}{4}\Big)\Big(\frac{1}{2}\Big)^n \delta n = -\Big(\frac{n^2+7n}{4} + A_2\Big)\Big(\frac{1}{2}\Big)^n + B$$

$$v(n) = \sum \Big(\Big(-\frac{n^2+7n}{4} - A_2\Big)\Big(\frac{1}{2}\Big)^n + B\Big)\delta n = \Big(\frac{n^2+9n}{2} + A\Big)\Big(\frac{1}{2}\Big)^n + Bn + C$$

$$u(n) = 2^n v(n) = \frac{n^2+9n}{2} + A + (Bn+C)2^n$$

Vi har här direkt fått den allmänna lösningen. Godtyckliga val av A, B och C ger partikulärlösningar, till exempel $A = B = C = 0$ ger

$$u_p(n) = \frac{n^2+9n}{2}$$

vilken med betydligt mindre arbete hade kunnat fås fram från ansatsen

$$u_p(n) = n(An+B)$$

enligt regel 2 ovan.

Begynnelsevillkor

Lösningen till differensekvationen

$$p(E)u(n) = f(n)$$

blir unikt bestämd om den kompletteras med begynnelsevillkor, till exempel på formen

$$u(i) = u_i, \quad 0 \le i < \text{grad } p$$

Att lösningen blir unik följer av att vi får en rekursion med väldefinierat basfall.

Lösningsmetodik

Lösningsförfarandet blir med fördel:

1. Finn *en* partikulärlösning $u_p(n)$.
2. Finn samtliga homogena lösningar, dvs faktorisera karakteristiska polynomet och skriv upp lösningarna enligt satsen:

   $$u_h(n) = \sum_i p_i(n)\lambda_i^n$$

3. Sätt in begynnelsevillkoren i den allmänna lösningen

   $$u(n) = u_h(n) + u_p(n)$$

   och bestäm därigenom de okända koefficienterna i polynomen p_i.

Övningsuppgifter

1. Finn en sluten form för Fibonaccitalen, vilka definieras rekursivt av

$$\begin{cases} u_n = u_{n-1} + u_{n-2}, & n \geq 2 \\ u_0 = 0, u_1 = 1 \end{cases}$$

   Verifiera resultatet med hjälp av induktion.

2. Finn den allmänna lösningen till

$$u_{n+2} - (2+a)u_{n+1} + 2au_n = (-1)^n$$

   för varje värde på parametern a.

3. Lös differensekvationerna

   (a)

$$\begin{cases} u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n = 0, & n \geq 0 \\ u_0 = 1, u_1 = 2 \end{cases}$$

   (b)

$$\begin{cases} u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n = (-1)^n, & n \geq 0 \\ u_0 = 1, u_1 = 2 \end{cases}$$

4. Lös rekursionen

$$\begin{cases} u_{n+3} - u_n = 0, & n \geq 0 \\ u_0 = a, u_1 = b, u_2 = c \end{cases}$$

   (a) genom inspektion

   (b) med de metoder som har presenterats ovan.

5. Utred de exakta sambanden mellan gradtalen för polynomen i observationen på sidan 4.

Referens

Den notation och teori som har använts för summationer finns i kapitel 2.6 av *Concrete Mathematics, second edition, Graham, Knuth* & *Patashnik, Addison-Wesley, 1994.*